Section 3 （整数論と数論幾何）の報告

望月新一

今回、Section 3（整数論と数論幾何）では、日本からは辻雄氏と筆者で招待講演者が二名おりましたので、報告作業は辻氏と分担して行なうことにしました。他の Section に入っていた数論的な色合いの濃い話と合わせて、報告の対象に決めた講演は１０数個にのぼりました。無駄な重複を避けるために、辻氏は主に専門の p 進 Hodge 理論に近い p 進関係の講演を担当し、筆者は、「その他」、主として Arakelov 理論や Diophantus 幾何に関連した、いわば数体上大域的な話を担当させていただきました。

まずは、全体講演ですが、厳密にいうと全体講演は整数論や数論幾何と関係があっても本題の Section 3 とは別枠に入りますが、以下の Section 3 の話と特に関係が深いと思われる話をいくつか選んで報告させて頂きます。

V. Voevodsky は、モチーフ理論の研究や、最近ではそのモチーフ理論の応用として得た Bloch-Kato 予想の（ある部分の）証明で有名な人です。今回の講演はそのモチーフ理論の基礎となっているコホモロジー理論について解説してくれました。位相幾何では、Dold-Thom の定理という定理があり、その定理によると、位相空間の特異コホモロジーは、その位相空間に対して、対称積をとるなど、ごく単純かつ標準的な幾何的な操作を行なうことによって復元することができます。今回紹介されたコホモロジー理論は、その定理を逆手にとって、先程の単純な操作は全部代数多様体に対しても行なえるものだという観察から出発して、Dold-Thom の定理と全く類似的な手順でその操作を代数多様体に対して行なうことによって代数多様体のコホモロジーを定義しようというものです。そのように得られるコホモロジー理論は一般には非常に計算しにくくて、一般のアーベル多様体の場合にさえまだ計算されていないのですが、曲線の場合、その曲線のヤコビアン（の有理点達のなす加群）になります。

E. Hrushovski は、モデル理論、つまり、ある体上で定義されたすべての多様体のなす圏やそれに似たような圏の内部的な構造に関する理論、の話をしてくれました。一見したところ、整数論や数論幾何とは余り関係ありそうにない話ですが、Hrushovski 氏の手法は、このような純粋に圏論的な考察のみによって、Raynaud の定理（＝種数が２以上の代数曲線をそのヤコビアンの中に埋め込んだとき、ヤコビアンの等分点で曲線にのっているものは有限個しかないというもの）の、 やや effective（＝「有限個」が言えただけでなく、個数に上限を与えることも出来た）な別証明をもたらしたことで、最近数論幾何学者からも注目を集めているそうです。

P. Shor は今回、「計算機／情報科学のフィールズ賞」ともいえる「ネヴァンリンナ賞」をとった人です。これも、一見数論とは余り縁のありそうにない話ですが、今回の授賞の対象となった、「量子計算機」に関する仕事は次の原理に基づいているそうです：ある離散的な情報に関する計算（例えば、二つの整数の掛け算）を行ないたいとき、通常の計算機だと、二進法などを使って、入力された離散的な情報を最後まで離散的なものとして扱うのですが、「量子計算機」では、量子力学の設定のように、複素数体上の（有限次元の）ベクトル空間の元たち（つまり、ベクトル）を、問題の「系」の可能な「状態」を表すものとみなし、そのベクトルに対して、様々な（複素数

係数の）行列を掛けることによってまずは「確立論的な答え」を出します。これは普通の計算と違って、ただ一つの答えを出すのではなく、様々な「可能な答え」に対して、その答えが正解である確立の分布を出すというものです。言い換えれば、このような中間的な出力は、元々知りたかった離散的な値に対する一種の連続的な「近似」になります。そして最後に、求めている答えが実は整数という離散的なものであるという情報と、十分によい連続的な近似から、最終的な答えを導くのです。この原理は、以下で紹介する F. Gramain 氏の話に出てくる「Box Principle」や、S. Zhang 氏の専門分野である Arakelov 理論でよく使われる議論と非常によく似ていて、数論的にも興味がもたれるものと判断しため、敢えてこの報告でとりあげることにさせていただきました。

F. Gramain は、ここ数年の超越数論の進展について報告しました。超越数論の大抵の証明で用いられる論法は G. Siegel の１９２０年代の仕事に溯るもので、いわゆる「Siegel の補題」と「Box Principle」の原理によって、ある点で高い位数の零点をもつ関数を構成し、一方、その位数がそこまで高ければ、関数を問題の点で Taylor 展開したとき、指定した領域のみならず、先のところまで、項が全部ゼロになってしまうことが帰結されます。ところが、そうなると、その関数が代数的であることが証明され、（関数の選び方から）矛盾が生じます。今回の Gramain 氏の話では、この手法に基づいた証明の超越性の結果がたくさん紹介されましたが、面白いところの一つは、楕円曲線に付随する様々な不変量の超越性の新しい証明では、上の議論に出てくる超越的な（＝非代数的な）関数として、従来の証明と違って、楕円曲線の普遍被覆空間上で定義される「楕円関数」ではなく、上半平面上のモジュラー関数が採用されます。後者の関数の正則性、つまり正則となる領域が、前者より限られたものになるので、より限られた正則性だけで強い超越性の定理が示されることが印象に残りました。

L. Merel は、楕円曲線の有理等分点の「一様有界性」（“uniform boundedness”）予想に最終的な解決を与えたことで知られています。今回の話は、例の予想やその数多くある部分的な解決の歴史の紹介や、Merel 氏自身の新しい貢献に関するものでした。基本的な論法は、B. Mazur の１９７０年代後半の仕事（＝例の予想を、有理数体 $\mathbf{Q}$ の場合にやや強い形で示したもの）にルーツを持つもので、適当なモジュラー曲線のヤコビアンの、有理点の少ない「よい商」を選んでその商の性質を調べることによって有理等分点の一様有界性を帰結します。そこで、この「よい商」にどの商を採用するかが重要な問題になりますが、Mazur 氏をはじめ、Merel 氏以前のすべての仕事では、Hecke 環の Eisenstein イデアルを使って定義される商しか使われていなかったのに対して、Merel 氏の仕事では、モジュラー曲線の普遍被覆空間となる上半平面の、虚軸（つまり、「y-軸」）にそって積分することによってある特別な性質を持った輪体が定義され、その輪体を使ってモジュラー曲線のヤコビアンの「よい商」を構成します。

H. Schlickewei は、１９７０年代に証明された「Schmidt 部分空間定理」に関連した最近の話題、特にそのより定量的な version や応用について解説しました。元の部分空間定理は、与えられた幾つかの代数的数係数の、n 変数の線型形式に対して、任意の（有理）整数の n 組みが、必ず次の二つのうちの（少なくとも）どちらかを満たす：

（１）与えられた線型形式たちにその n 組みを代入したときに、出てくる値たちの積がある不等式を満たす。

（２）整数の n 組みが、幾つかの固定された（つまり、問題の n 組みによらない）零でない線型関係式の零点になる。

というものです。定量的な改良版は Schlickewei − Evertse による共同研究で、Diophantus 方程式論への応用もあります。

S. Zhang は、数論的な多様体の（代数的数全体に値をとる）有理点の等分布性と、Bogomolov 予想の E. Ullmo と自分自身による証明について説明しました。Diophantus 幾何では、数論的な多様体の有理点に対してその有理点の「複雑度」を測る「height」と呼ばれる（大抵の場合正な）実数を対応させます。有理点の列が与えられ、その列の点たちの height が 0 に収束するとき、その点たちを「小さい」（“small”）と呼びます。Zhang 氏他が示した重要な結果の一つは、「小さい点」の列を、多様体の複素位相でみたとき、その点たちが多様体全体の上で一様に分布しがちであるというものです。このような「等分布性定理」を使って、Ullmo 氏と Zhang 氏は、Bogomolov 予想を証明しました。この予想は、数体上定義されたアーベル多様体の「非線型的な」部分多様体に対して、アーベル多様体の「小さい点」の列で、点たちが全部その部分多様体上にのっているものは存在しないというものです。この予想のやや弱い帰結の一つとして、先程 Hrushovski 氏の話に出た Raynaud の定理があります。

最後に、筆者の講演ですが、複素数体上で定義された双曲的な代数曲線が上半平面で一意化されるという古典的な事実の p 進版を実現することを目的とした最近の仕事を紹介しました。複素数体の場合の上半平面による一意化には様々な側面や解釈がありますが、そのうちの二つは以下の通りです：

（1）上半平面をある不連続群の作用で割ることによって、一意化理論が元の代数曲線に対して物理的な「解析的表示」を与えている。

（2）その不連続群の（擬等角な）変形を考えることによって、代数曲線のモジュライが自然に一意化される。

この二つの側面に関しては、（1）の場合には、「Grothendieck 予想の p 進版」、（2）の場合には、「p 進 Teichmüller 理論」という p 進的な類似があり、これらの結果ないし理論について解説しました。

全体講演

E. Hrushovski, “Geometric Model Theory”
P. Shor, “Quantum Computing”
V. Voevodsky, “Homotopy Theory of Algebraic Varieties”

招待講演

F. Gramain, “Some Results of Algebraic Independence”
L. Merel, “Determination of Rational Points Using Dirichlet Series”
H. Schlickewei, “The Absolute Subspace Theorem and Applications”
S. Zhang, “Small Points and Arakelov Theory”
S. Mochizuki, “The Intrinsic Hodge Theory of p-adic Hyperbolic Curves”